ABV4116
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B55429
035/2: : |a (CaOTULAS)160213553
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Adams, Carl, |d 1811-1849.
245:04: |a Das Malfattische problem ...
260: : |a Winterthur, |b Steiner, |c 1846.
300/1: : |a 24 p. |b 1 fold. pl. |c 26 cm.
650/1: 0: |a Malfatti's problem
998: : |c WFA |s 9124

Das

Malfattische Problem,

neu gelöst

von

C. ADAMS,

Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule in Winterthur.

Τῶν πόνων
πωλοῦσιν ἡμῖν πάντα τ'ἀγαθὰ θεοί.
Ἐπίχαρμος.

Mit einer lithographirten Tafel.

Winterthur 1846.

Druck und Verlag der Steiner'schen Buchhandlung.

Erster Abschnitt.

Die älteren Auflösungen.

§. 1.

Die Aufgabe, in ein Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche einander, und einzeln je zwei Seiten des Dreiecks berühren, ist zuerst von *Malfatti*, einem ausgezeichneten italiänischen Mathematiker aufgestellt und gelöst worden. Daher der Name Malfattisches Problem. *Malfatti* gibt indess nur die Grundformeln und die Resultate, und zeigt alsdann, dass jene mit diesen in Einklang sind. — Seine Auflösung datirt vom Jahre 1803, und findet sich in dem ersten Theile des zehnten Bandes der Memoiren der italiänischen Gesellschaft der Wissenschaften. — *Bidone*, Professor an der Akademie in Turin, erklärt sich darüber an die Herren *Gergonne* & *Lavernède*, Redaktoren der *Annales de mathématiques*, wie folgt (Siehe tom. II, pag. 60):

„*Tel est le précis de la solution de M. Malfatti, qu'il dit avoir converti en un théorème, comme on le voit par ses procédés, pour la présenter sous une forme plus simple, et pour ne pas être obligé d'exposer le nombre de calculs qu'il a sans doute dû faire pour arriver à cette construction, en cherchant à résoudre directement le problème. M. Malfatti n'indique nullement la trace qu'il a suivie pour parvenir aux valeurs des inconnues, et l'on peut dire que son mémoire est tout renfermé dans ce précis, à quelques développemens près.*“ —

Nach *Malfatti* sind nun die Radien der gesuchten Kreise:

$$x = \frac{r}{2n}(s + e - r - f - g)$$

$$y = \frac{r}{2k}(s + f - r - e - g)$$

$$z = \frac{r}{2m}(s + g - r - e - f),$$

wo r den Radius des einbeschriebenen Kreises, s die halbe Summe der Seiten, e, f, g die Abstände der Ecken des Dreiecks vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, endlich n, k, m die Abstände der Ecken von den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises bezeichnen. — Diese Werthe führen *Malfatti* zu folgender Construction:

Figur 1.

Es sei ABC das Dreieck und S der Mittelpunkt seines einbeschriebenen Kreises. Man verlängere BC und mache $CE = At = At_1$ und $EF = BD$, ferner trage man AS von F nach G und CS von G nach H auf, halbire BH in J, und ziehe durch J die Senkrechte OJ auf BC, welche der BS in O begegnet; dann ist O der Mittelpuukt, OJ der Radius eines der gesuchten Kreise. Analog werden die Mittelpunkte und Radien der beiden anderen Kreise bestimmt.

Der Beweis dieser Construction ergibt sich sehr leicht, wenn man die Richtigkeit der *Malfattischen* Ausdrücke voraussetzt.

Da nämlich

$At + BC = s$, so ist auch

$BE = s$ und da $EF = BD = f - r$ ist, so hat man

$BF = s + f - r$; da ferner $FG = AS$, $GH = CS$, so ist

$BH = s + f - r - e - g$. —

Ferner hat man:

$OJ : BJ = SM : BM$ d. h.

$$OJ : \frac{s + f - r - e - g}{2} = r : k, \text{ mithin ist}$$

$$OJ = \frac{r}{2k} (s + f - r - e - g)$$

wie verlangt wurde. —

§. 2.

Ohne die Malfattische Auflösung zu kennen, suchten die Herren *Gergonne* & *Lavernède* eine selbstständige Lösung des Problems. Jm ersten Band der *Annales de mathématiques* vom Jahr 1810 und 1811 sagen sie darüber Folgendes:

„*Il y a plus de dix ans que ce difficile problème s'est offert, pour la première fois, aux rédacteurs de ce receuil; mais, bien qu'ils l'aient attaqué un grand nombre de fois, ils n'ont pu, pendant long temps*

parvenir à le résoudre, ni même à s'assurer s'il était résoluble par la ligne droite et le cercle. Aussi n'auraient-ils pas songé à le proposer dans les Annales, s'ils n'y avaient été invités par un de leurs abonnés. —

Ils avaient lieu de penser que le géomètre qui les avait sollicité à appeler sur ce problème l'attention de leurs lecteurs, se chargerait lui-même de le résoudre, au cas qu'il n'en vint aucune solution d'autre part; mais ayant long-temps et vainement attendu, ils ont cru devoir faire encore de nouvelles tentatives, et plus heureux cette fois que les précédentes, ils sont parvenus, sinon à trouver une construction du problème, du moins à l'abaisser au premier degré, et à reduire sa résolution arithmétique à un calcul assez simple.

Diese Auflösung ist nun folgende:

Figur 1.

Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen unstreitig in den Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks. Sind nun M, t, t_1 die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises mit den Seiten des Dreiecks und setzt man $At = At_1 = n$, $Bt = BM = k$, $Ct_1 = CM = m$, so ist

$$BM : r = BJ : OJ \text{ d. h.}$$

$$k : r = BJ : y \text{ mithin}$$

$$BJ = \frac{ky}{r}.$$

Eben so hat man

$$CJ_1 = \frac{mz}{r}.$$

Ferner ist

$$JJ_1 = \sqrt{\left\{ (y + z)^2 - (y - z)^2 \right\}} = 2\sqrt{yz}.$$

Da nun

$$BJ + CJ_1 + JJ_1 = BC = a, \text{ so hat man}$$

$$\frac{ky + mz}{r} + 2\sqrt{yz} = a, \text{ mithin}$$

$$A \begin{cases} ky + mz + 2r\sqrt{yz} = ar. \quad \text{Eben so ist} \\ mz + nx + 2r\sqrt{xz} = br. \\ nx + ky + 2r\sqrt{xy} = cr, \end{cases}$$

Um nun aus diesen Gleichungen die Werthe von x, y, z zu entwickeln, setze man:

$$z = yu^2; \; x = yv^2.$$

Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (A) in folgende:

$$B \begin{cases} y\,(k + mu^2 + 2ru) = ar. \\ y\,(mu^2 + nv^2 + 2ruv) = br. \\ y\,(nv^2 + k + 2rv) = cr. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen gibt:

$$y = \frac{br}{mu^2 + nv^2 + 2ruv}.$$

Substituirt man diesen Werth in die zweite und dritte, so erhält man:

$$C \begin{cases} b\,(k + mu^2 + 2ru) = a\,(mu^2 + nv^2 + 2ruv) \\ b\,(nv^2 + k + 2rv) = c\,(mu^2 + nv^2 + 2ruv) \end{cases}$$

Es handelt sich also zunächst darum, aus den Gleichungen (C) die Werthe von u und v zu bestimmen. Zu dem Ende multiplizire man die erste Gleichung mit ckn, die zweite mit akm, so hat man

$$bckn\,(k + mu^2 + 2ru) = ackn\,(mu^2 + nv^2 + 2ruv)$$
$$abkm\,(nv^2 + k + 2rv) = ackm\,(mu^2 + nv^2 + 2ruv)$$

oder auch

$$D \begin{cases} (a - b)\,ckmnu^2 + ackn^2v^2 + 2acknruv = bcnk^2 + 2bcknru \\ (c - b)\,akmnv^2 + ackm^2u^2 + 2ackmruv = abmk^2 + 2abkmrv \end{cases}$$

Nun ist, wenn wieder s den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet:

$$n = s - a;\ k = s - b;\ m = s - c.$$
$$\triangle ABC = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$
$$kmn = (s - a)\,(s - b)\,(s - c) = r^2s.$$

(Siehe meine Abhandlung: die merkwürdigsten Eigenschaften des Dreiecks, Lehrs. XVIII Zus.)

Ferner ist

$$a - b = \frac{a\,(s - b) - b\,(s - a)}{s} = \frac{ak - bn}{s}.$$

$$c - b = \frac{c\,(s - b) - b\,(s - c)}{s} = \frac{ck - bm}{s}.$$

Berücksichtigt man diese Relationen, so verwandeln sich die Gleichungen (D) in folgende:

$$(ak - bn)\,cr^2u^2 + ackn^2v^2 + 2acknruv = bcnk^2 + 2bcknru$$
$$(ck - bm)\,ar^2v^2 + ackm^2u^2 + 2ackmruv = abmk^2 + 2abkmrv$$

und mit Versetzung einiger Glieder:

$$ack\,(r^2u^2 + n^2v^2 + 2nruv) = bcn\,(r^2u^2 + k^2 + 2kru)$$
$$ack\,(r^2v^2 + m^2u^2 + 2mruv) = abm\,(r^2v^2 + k^2 + 2krv)\ \text{d. h.:}$$

$$E \begin{cases} ack\,(ru + nv)^2 = bcn\,(ru + k)^2 \\ ack\,(rv + mu)^2 = abm\,(rv + k)^2 \end{cases}$$

Setzt man nun wieder, wie in §. 1,

$$AS = e,\ BS = f,\ CS = g,$$

und nennt man die Mittelpunkte der das Dreieck ABC auswärts tangirenden Kreise S_1, S_2, S_3, so ist (Eigensch. des Dreiecks Lehrs. XV, *Zus* 1)

$$AB \cdot AC = AS \cdot AS_1, \text{ d. h.}$$

$$bc = e \cdot AS_1.$$

Ferner hat man

$$e : n = AS_1 : s, \text{ mithin}$$

$$n = \frac{es}{AS_1}.$$

Hieraus folgt
$$bcn = e^2s \text{ und eben so ist}$$

$$ack = f^2s$$

$$abm = g^2s.$$

Die Substitution dieser Werthe in (E) machen jede Seite dieser Gleichungen zu vollständigen Quadraten, d. h. es ist

$$f^2 (ru + nv)^2 = e^2 (ru + k)^2$$

$$f^2 (rv + mu)^2 = g^2 (rv + k)^2$$

mithin ist

$$F \left(\begin{array}{l} f (ru + nv) = e (ru + k) \\ f (rv + mu) = g (rv + k) \end{array} \right.$$

Hieraus folgt weiter

$$(f - e)\, ru + fnv = ek$$

$$fmu + (f - g) rv = gk \text{ und}$$

$$G \left\{ \begin{array}{l} u = k. \dfrac{fgn - (f - g)\, re}{f^2mn - (f - e)(f - g)\, r^2} \\ v = k. \dfrac{fme - (f - e)\, gr}{f^2mn - (f - e)(f - g)\, r^2} \end{array} \right.$$

Da ferner

$$f^2 = \frac{ack}{s},\ g^2 = \frac{abm}{s} \text{ und } kmn = r^2s,$$

so ist
$$f^2mn = acr^2.$$

$$f^2g^2 = \frac{a^2bckm}{s^2}.$$

$$f^2g^2n^2 = \frac{a^2bcn \cdot kmn}{s^2} = a^2e^2r^2$$

mithin

$$fgn = aer. \text{ Eben so}$$
$$fem = cgr.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (G), so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$H \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{ke}{r} \cdot \frac{a - f + g}{ac - (f - e)(f - g)} \\ v &= \frac{kg}{r} \cdot \frac{c + e - f}{ac - (f - e)(f - g)} \end{aligned} \right.$$

Demnach ist

$$J \left\{ \begin{aligned} mu^2 &= \frac{mk^2e^2}{r^2} \left(\frac{a - f + g}{ac - (f - e)(f - g)} \right)^2 \\ nv^2 &= \frac{nk^2g^2}{r^2} \left(\frac{c + e - f}{ac - (f - e)(f - g)} \right)^2 \\ 2ruv &= \frac{2k^2eg}{r} \cdot \frac{(a - f + g)(c + e - f)}{(ac - (f - e)(f - g))^2} \end{aligned} \right.$$

Es ist aber, wie schon vorher gezeigt wurde

$$mk = \frac{r^2s}{n}$$

$$e^2 = \frac{bcn}{s}, \text{ mithin}$$

$$mk^2e^2 = k \cdot r^2 \cdot bc. \text{ Eben so ist}$$

$$nk^2g^2 = kr^2ab \text{ und}$$

$$e^2g^2 = \frac{ab^2c \cdot mn}{s^2}, \text{ mithin}$$

$$k^2e^2g^2 = \frac{ack \cdot kmn \cdot b^2}{s^2} = f^2r^2b^2, \text{ folglich}$$

$$keg = frb.$$

Die Substitution dieser Werthe ergibt

$$K \left\{ \begin{aligned} mu^2 &= kbc \left(\frac{a - f + g}{ac - (f - e)(f - g)} \right)^2 \\ nv^2 &= kab \left(\frac{c + e - f}{ac - (f - e)(f - g)} \right)^2 \\ 2ruv &= 2kfb \frac{(a - f + g)(c + e - f)}{(ac - (f - e)(f - g))^2}. \end{aligned} \right.$$

Da nun

$$y = \frac{br}{mu^2 + nv^2 + 2ruv},$$

so erhält man:

$$(L)\quad y = \frac{r}{k} \cdot \frac{(ac - (f - e)(f - g))^2}{c(a - f + g)^2 + a(c + e - f)^2 + 2f(a - f + g)(c + e - f)}. -$$

So weit die Redactoren der *Annalen*. Dieser Ausdruck ist bei weitem weniger einfach, als der für denselben Radius gefundene Werth von *Malfatti*. — (S. §. 1.) Es scheint schwierig, die Identität beider Ausdrücke nachzuweisen. Indess wollen wir im folgenden (§.) versuchen, den so eben gefundenen Werth zu vereinfachen und für die geometrische Construction anzupassen. —

§. 3.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Mittelpunkte der das Dreieck ABC auswärts berührenden Kreise mit S_1, S_2, S_3 und die Radien der das Dreieck $S_1 S_2 S_3$ berührenden Kreise mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$. Dann ist:

$$ac = BS.\, BS_2 = f\,(f + SS_2)$$

$$(f - e)(f - g) = f^2 - ef - fg + eg, \text{ mithin}$$

$$ac - (f - e)(f - g) = f.\, SS_2 + ef + fg - eg.$$

Nun ist (Eigenschaften des Dreiecks Lehrs. XXXIV Zus.):

$$f.\, SS_2 = 4Rr.$$

$$\left.\begin{aligned} ef &= SS_3.\, r \\ fg &= SS_1.\, r \\ eg &= SS_2.\, r \end{aligned}\right\} \text{(Dreieck Lehrs. IV, Zus.)}$$

Hieraus folgt

$$ac - (f - e)(f - g) = r\,(4R + SS_3 + SS_1 - SS_2). -$$

R bezeichnet hier den Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises. Da nun der Radius des dem Dreieck $S_1 S_2 S_3$ umschriebenen Kreises $= 2R$ ist (Dreieck Lehrs. XXII), so hat man (Dreieck Lehrs. XX):

$$SS_1 + SS_2 + SS_3 = 2\,(2R + \mathfrak{R}). \text{ Aber}$$

$$2SS_2 = 2\,(4R + \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_2)$$

mithin

$$SS_1 + SS_3 - SS_2 = 2\mathfrak{R}_2 - 4R \text{ und}$$

$$4R + SS_1 + SS_3 - SS_2 = 2\mathfrak{R}_2, \text{ demnach}$$

$$(M)\quad ac - (f - e)(f - g) = 2r\mathfrak{R}_2. -$$

Ferner ist

$$c\,(a - f + g)^2 = (a - f + g)\,(ac - cf + cg)$$

$$a\,(c + e - f)^2 = \qquad (c + e - f)\,(ac + ae - af)$$

$$2f\,(a - f + g)\,(c + e - f) = (a - f + g)\,(cf + ef - f^2) + (c + e - f)\,(af - f^2 + fg)$$

mithin

$$c\,(a - f + g)^2 + a\,(c + e - f)^2 + 2f\,(a - f + g)\,(c + e - f) =$$

$$(a - f + g)\,(ac + cg + ef - f^2) + (c + e - f)\,(ac + ae - f^2 + fg)$$

$$= (ac - f^2)\,(a + c + e + g - 2f) + (cg + ef)\,(a - f + g) + (ae + fg)\,(c + e - f)$$

$$= (ac - f^2)\,(a + c + e + g - 2f) + ace + acg + ae^2 + cg^2 - ef^2 - gf^2 + 2efg.$$

$$= (ac - f^2)\,(a + c + 2e + 2g - 2f) + ae^2 + cg^2 + 2efg.$$

Nun ist

$$a + c = 2s - b, \text{ mithin}$$

$$c\,(a - f + g)^2 + a\,(c + e - f)^2 + 2f\,(a - f + g)\,(c + e - f)$$

$$= 2\,(ac - f^2)\,(s + e + g - f) + ae^2 + bf^2 + cg^2 - abc + 2efg.$$

Da aber

$$e^2 = bc - 4Rr, \text{ so ist}$$

$$ae^2 = abc - a.\,4Rr. \text{ Eben so}$$

$$bf^2 = abc - b.\,4Rr$$

$$cg^2 = abc - c.\,4Rr, \text{ folglich}$$

$$ae^2 + bf^2 + cg^2 = 3abc - 2s.\,4Rr.$$

Aber

$$abc = 4R\triangle = 4Rrs.$$

Daher

$$ae^2 + bf^2 + cg^2 = 12Rrs - 8Rrs$$

$$= 4Rrs = abc, \text{ mithin}$$

$$ae^2 + bf^2 + cg^2 - abc = o.$$

Weil ferner

$$efg = 4Rr^2 \text{ (Dreieck Lehrs. XXVI)}$$

$$\text{und } ac - f^2 = 4Rr, \text{ so ist endlich}$$

$$(N) \quad c\,(a - f + g)^2 + a\,(c + e - f)^2 + 2f\,(a - f + g)\,(c + e - f)$$

$$= 8Rr\,(s + r + e + g - f).$$

Substituirt man nun die Werthe von (M) und (N) in (L), so erhält man

$$y = \frac{r}{k} \cdot \frac{4r^2\mathfrak{R}_2^2}{8Rr\,(s + r + e + g - f)}$$

$$= \frac{r^2}{2k} \cdot \frac{\mathfrak{R}_2^2}{R\,(s + r + e + g - f)}$$

ein Ausdruck, der sehr leicht zu construiren ist, und überdiess mit dem von *Malfatti* angegebenen Werthe viel Aehnlichkeit hat. — Eben so erhält man

$$x = \frac{r^2}{2n} \cdot \frac{\mathfrak{R}_1^2}{R\,(s + r - e + f + g)}.$$

$$z = \frac{r^2}{2m} \cdot \frac{\mathfrak{R}_3^2}{R\,(s + r + e + f - g)}.$$

§. 4.

Anstatt den Ausdruck (L) zu vereinfachen, was zu einer neuen Construction führen musste, wie wir es so eben in §. 3 gezeigt haben, zogen es die Herren *Gergonne* und *Lavernède* vor, aus den *Malfattischen* Ausdrücken für die Halbmesser die ursprünglichen Gleichungen (A) herzuleiten. Wir dürfen diese Deduction um so eher übergehen, als aus unserer neuen Auflösung (Abschnitt 3) die *Malfattischen* Ausdrücke unmittelbar hervorspringen. — Eben so übergehen wir die Bemerkungen von *Tédenat*, da die Resultate seiner Entwickelungen ebenfalls in unserer neuen Auflösung enthalten sind. — Wer sich für jene, nicht ohne Scharfsinn ausgeführten Arbeiten der Französischen Mathematiker interessirt, den verweisen wir auf die *Annales de Mathématiques, Tom. II p.* 60 — 64 und *p.* 165 — 170, so wie auf die Reproduction derselben von *Crelle* im ersten Bande seiner Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen vom Jahr 1821. —

Nächst *Malfatti* gelang zuerst Herrn *Dr. Lehmus* die directe Lösung des vorliegenden Problems. Diese findet sich in dem Anhang zum zweiten Bande seines Lehrbuchs der Geometrie, Berlin 1820. Im Ganzen übereinstimmend damit, und nur theilweise abweichend ist die Auflösung von *Crelle*, welche er im Jahre 1821 in der so eben berührten Sammlung mathematischer Aufsätze bekannt machte. — Die Auflösung geschieht mit Anwendung trigonometrischer Functionen, in deren Umwandelung die Herren Verfasser grosse Gewandtheit zeigen. Die neueste Lösung im gleichen Sinne ist die von Herr Professor *Grunert* in *Klügels* Wörterbuch, Supplementband 1ste Abtheilung, unter dem Artikel: Anwendung der Analysis. Herr *Grunert* hat eine grosse Symmetrie in seine Formeln gebracht, und dadurch dem Calcul eine bedeutende Eleganz gegeben. Da wir

voraussetzen dürfen, dass das Wörterbuch jedem Mathematiker zugänglich ist, so begnügen wir uns hier, die Grundformeln anzuführen, und verweisen im Uebrigen auf den betreffenden Artikel des mathematischen Wörterbuches. —

Figur 1.

Bezeichnen wir die Winkel des Dreiecks mit α, β, γ, und setzen den Radius des einbeschriebenen Kreises $= 1$, so ist

$$BJ = y \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta,\ CJ_1 = z \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma$$

$$OO^1 = y + z,\ JJ_1 = \sqrt{((y+z)^2 - (y-z)^2)} = 2\sqrt{yz}.$$

$$BM = \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta,\ CM = \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma, \text{ mithin}$$

$$y \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta + z \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma + 2\sqrt{yz} = \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta + \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma = a.$$

Eben so

$$x \operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha + z \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma + 2\sqrt{xz} = \operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha + \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma = b.$$

$$x \operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha + y \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta + 2\sqrt{xy} = \operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha + \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta = c.$$

Ferner ist

$$e = \operatorname{cosec.} {}^1/_2\alpha,\ f = \operatorname{cosec.} {}^1/_2\beta,\ g = \operatorname{cosec.} {}^1/_2\gamma.$$

Hieraus folgt denn, nach gehöriger Entwickelung

$$x = {}^1/_2 \operatorname{tg.} {}^1/_2\alpha\ (s - 1 + e - f - g)$$

$$y = {}^1/_2 \operatorname{tg.} {}^1/_2\beta\ (s - 1 + f - e - g)$$

$$z = {}^1/_2 \operatorname{tg.} {}^1/_2\gamma\ (s - 1 + g - e - f),$$

welche Formeln mit den von *Malfatti* gegebenen gänzlich übereinstimmen.

Zweiter Abschnitt.

Die Steiner'sche Construction.

§ 5.

Einfacher und bei weitem mehr im Geiste der reinen Geometrie, als alle bisher angeführten, ist die Auflösung des *Malfattischen* Problems, welche Herr Professor *Steiner* im ersten Bande des *Crelle'schen Journals, Berlin* 1826, mitgetheilt hat. —

Herr *Steiner* hat indess nur die Construction gegeben, ohne allen Beweis und ohne Erörterung des Abhängigkeitsgesetzes, welches zwischen den gesuchten Radien, den Seiten und den Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks stattfindet. Dennoch verdient diese Construction, welche wir hier mit den eigenen Worten des scharfsinnigen Herrn Verfassers wiedergeben, die vollste Anerkennung. Herr *Steiner* löst die Aufgabe also:

Figur 2.

1) Man halbire die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC durch die drei Linien AS, BS, CS; so treffen sich diese Linien bekanntlich in einem und demselben Punkt S. —

2) Jn das Dreieck ASB beschreibe man den Kreis (c_1), welcher die Seite AB in dem Punkte C_1 berührt, und in das Dreieck BSC beschreibe man den Kreis (a_1). —

3) Aus dem Punkte C_1 lege man an den Kreis (a_1) die Tangente C_1A_2, und beschreibe

4) in das Dreieck AC_1A_2 den Kreis (a), so ist dieser einer der verlangten drei Kreise. —

Die beiden übrigen gesuchten Kreise (b), (c) werden auf ganz ähnliche Weise gefunden. —

Herr *Steiner* hat uns freilich nicht gesagt, durch welche Betrachtungen er zu dieser eleganten Lösung gekommen ist. Jede Muthmassung darüber gehört dem Gebiete der Wahrscheinlichkeit an. — Uns will indessen scheinen, Herr Professor *Anger* habe hier die Wahrheit getroffen, und wir theilen dessen Muthmassung um so lieber mit, als seine Ansicht nicht nur in diesem

Falle bewährt erscheint, sondern ausserdem zu einem allgemeinen Principe führt, dessen Anwendung für die geometrische Forschung sehr fruchtbar werden kann. —

Herr *Anger* sagt nämlich in seinen Betrachtungen über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie, *Danzig* 1841, zweites Heft pag. 25:

Figur 3.

„Nimmt man das Dreieck gleichseitig an, so ergibt sich für diesen partiellen Fall sogleich folgende Lösung:

Man halbire die Winkel des gegebenen Dreiecks durch die drei Linien AS, BS, CS, welche sich bekanntlich in einem und demselben Punkte S schneiden. Diese Linien mögen nach der Reihe die drei Seiten in den Punkten D, E, F treffen, dann entstehen die drei congruenten Vierecke BESD, EAFS und SFCD, in welchen zwei gegenüberliegende Winkel, z. B. AES und AFS rechte sind. Jn solche Vierecke lässt sich bekanntlich immer ein Kreis einschreiben, *) und wenn wir dieses z. B. beim Vierecke AESF thun, so ist der in dasselbe beschriebene Kreis offenbar einer der drei verlangten Kreise, und die beiden übrigen ergeben sich von selbst, ganz auf dieselbe Weise. Beschreibt man nun in die Dreiecke ASB und ASC die Kreise (c_1) und (b_1), welche die Seiten AB und AC respektive in den Punkten E und F berühren, so ist CE eine die beiden Kreise (a) und (b_1) Berührende; auch ist klar, dass der Kreis (a) als dem Dreiecke AEC eingeschrieben betrachtet werden kann.

Projicirt man nun dieses Gebilde perspectivisch, so kann man dadurch das Dreieck ABC als ein beliebiges unregelmässiges, den Kreis (a) so wie die Kreise (c_1) und (b_1) als Ellipsen erscheinen lassen, und zugleich wird die Gerade CE in der Projection immer diejenigen beiden Ellipsen berühren, welche die Projectionen der Kreise (a) und (b_1) sind, so dass diejenige Ellipse, welche die Projection des Kreises (a) ist, einem Dreiecke eingeschrieben bleibt, welches als Projection des Dreiecks AEC erscheint. Wenn es demnach möglich ist, bei dem Dreiecke im Allgemeinen diejenigen Kreise zu bestimmen, welche beim gleichseitigen Dreiecke den Kreisen

*) Herr *Anger* ist hier im Jrrthum. Nicht in alle Vierecke, in welchen zwei gegenüberliegende Winkel rechte sind, lässt sich ein Kreis einschreiben, wohl aber in solche Vierecke, in welchen die Summe von zwei gegenüberliegenden Seiten gleich ist der Summe der beiden anderen Seiten. Letzteres ist auch hier wirklich der Fall.

(c_1) und (b_1) entsprechen, so wird man nur durch den Berührungspunkt, welcher dem Berührungspunkte E entspricht, an den dem Kreise (b_1) entsprechenden Kreis eine Berührungslinie zu ziehen haben, um ein Dreieck zu erhalten, welches einem der gesuchten drei Kreise umschrieben ist, indem man auch den Kreis als Ellipse betrachten kann. Es kommt nun zunächst darauf an, für das Dreieck im Allgemeinen (Figur 2) denjenigen Punkt S zu bestimmen, welcher dem Punkte S (Figur 3) entspricht, ohne jedoch die Projection desselben zu sein. — Für diesen Punkt bietet sich nun aber (Figur 2) derjenige dar, in welchem die drei Halbirungslinien der Winkel sich treffen, wenigstens ist dieser Punkt für das Dreieck im Allgemeinen dem Punkt S für gleichseitige Dreiecke (Figur 3) analog. Beschreibt man demnach in die Dreiecke ASB und ASC die Kreise (c_1) und (b_1) und hält den Berührungspunkt C_1 fest, so entspricht derselbe dem Berührungspunkte E (Figur 3) und insofern man (Figur 3) die Gerade EC nur als Berührende der Kreise (a) und (b_1) fest hält, bietet sich von selbst der Gedanke dar, durch C_1 (Figur 2) an den Kreis (b_1) die Tangente C_1A_2 zu legen, und sich dadurch ein Dreieck AC_1A_2 zu verschaffen, welches einem der gesuchten drei Kreise umschrieben ist. Freilich muss die Construction, welche man durch die vorhergehende Betrachtung nur als wahrscheinlich ermittelt hat, noch direct bewiesen werden, allein man hat sich doch in der That auf dem eingeschlagenen Wege vom Speciellen zum Allgemeinen erhoben. —

Wir wollen das hier beobachtete Princip allgemein aussprechen:

Wenn es sich bei einem Satze oder einer Aufgabe um Beziehungen zwischen Gebilden irgend einer Art handelt, so suche man die Allgemeinheit der Form möglichst zu beschränken, und verschaffe sich dadurch neue Gebilde, welche, obgleich sie noch immer zur Gattung der vorliegenden gehören, dennoch viel einfacher sind. An diesen neuen Gebilden untersuche man nun entweder die Beziehungen, welche Statt finden, oder löse die Aufgabe, welche im Allgemeinen gegeben war, so bieten sich Sätze und Lösungen dar, welche wir particuläre nennen. Man projicire sodann die einfachen Gebilde perspectivisch, und überlege, was die erkannten speciellen Beziehungen jetzt im Allgemeinen herbeiführen, wenn zugleich die Allgemeinheit der durch die Projection erhaltenen neuen Gebilde auf erlaubte Weise wieder beschränkt wird. Dadurch wird man von particulären Sätzen oder Lösungen sich zu den vollständigen erheben können.“

§. 5.

Wie schon bemerkt, hat Herr *Steiner* seine Construction nicht bewiesen. Dagegen hat Herr *Zornow*, Professor am Kneiphöfischen Gymnasium in Königsberg, im Jahre 1833 eine Analysis gegeben, welche direct zu der Steiner'schen Construction hinführt. Dieselbe findet sich im zehnten Bande des *Crelleschen Journales* pag. 300 — 302. — Wir anerkennen die Richtigkeit dieser Analysis, halten aber die Darstellung für ziemlich abstrus, und erlauben uns daher, dieselbe in einem wesentlichen Momente zu modificiren. Herr *Zornow* beweist nämlich, dass die von b (Fig. 2) an den Kreis (a_1) gelegte Tangente mit der Halbirungslinie BS des Winkels A zusammenfällt. Dieser indirecte Weg kann vermieden, und direct gezeigt werden, dass der Kreis (a_1) dem Dreieck BSC einbeschrieben ist. —

Demnach gestaltet sich diese Analysis wie folgt:

Figur 2.

Es seien (a), (b), (c) die gesuchten drei Kreise, α, β, γ ihre Radien, PA_1, PB_1, PC_1 die je zweien zugehörigen Potenzlinien, so ist P zugleich der Mittelpunkt des dem Dreieck abc einbeschriebenen Kreises. Setzen wir den halben Umfang dieses Dreiecks $= \sigma$, so wie den Radius des ihm einbeschriebenen Kreises $= \varrho$, so ist

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma$$
$$\sigma - ab = \gamma$$
$$\sigma - ac = \beta$$
$$\sigma - bc = \alpha \text{ und}$$
$$\varrho = \frac{\triangle abc}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)}.$$

Man fälle nun von den Mittelpunkten a, b, c auf die Seiten des ursprünglichen Dreiecks die Senkrechten ad, ad_1, bf, bf_1, cg, cg_1, und halbire die Winkel abf_1, acg etc., so erhält man die Mittelpunkte a_1, b_1, c_1 dreier neuen Kreise, welche einzeln je eine Seite des ursprünglichen Dreiecks und ausserdem je zwei der drei oben construirten Potenzlinien PA_1, PB_1, PC_1 berühren. — Die Berührungspunkte dieser Kreise mit den Seiten des Dreiecks seien A_1, B_1, C_1, ferner seien m_1, n_1 die Berührungspunkte des Kreises (a_1) mit den Potenzlinien PC_1 und PB_1, so ist

$$A_1f_1 = mm_1$$
$$A_1g = nn_1$$

Aber

$$mm_1 = Pm + Pm_1,$$
$$nn_1 = Pn + Pn_1,$$

Ferner $$Pm = Pn,\ Pm_1 = Pn_1,\ \text{daher auch}$$
$$mm_1 = nn_1 \text{ und}$$
$$A_1f_1 = A_1g \text{ d. h.}$$

die Berührungspunkte A_1, B_1, C_1 der Kreise (a_1), (b_1), (c_1) fallen zusammen mit den Fusspunkten A_1, B_1, C_1 der Potenzlinien. Da nun ferner die Geraden A_1b und A_1c auf einander senkrecht stehen, so ist

$$A_1p = A_1f_1 = A_1g = \sqrt{\beta\gamma}. \text{ Eben so}$$
$$B_1n = B_1d_1 = B_1g_1 = \sqrt{\alpha\gamma}.$$
$$C_1m = C_1d = C_1f = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Die Kreise (a_1), (b_1), (c_1) berühren ferner die Halbirungslinien AS, BS, CS der Winkel des ursprünglichen Dreiecks.

Dies ergibt sich auf folgende Weise:

Zieht man von a_1 auf BS die Senkrechte a_1t und zugleich von b nach C_1 die Gerade bC_1, so ist $$\angle Bbf_1 + \angle f_1ba_1 + \angle a_1bt = 180^\circ$$

Ferner ist wegen

$$\angle Bbf_1 = \angle Bbf$$
$$\angle f_1ba_1 = \angle aba_1$$
$$\angle fbC_1 = \angle abC_1$$
$$2\angle Bbf_1 + 2\angle f_1ba_1 + 2\angle fbC_1 = 360^\circ$$

mithin $$\angle a_1bt = \angle fbC_1$$

d. h. die Dreiecke a_1bt und C_1bf sind einander ähnlich:

Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$a_1b : bt = bC_1 : bf, \text{ mithin auch}$$
$$(a_1b)^2 : (bt)^2 = (bC_1)^2 : (bf)^2.$$

Nun ist, wenn man die Radien der Kreise (a_1), (b_1), (c_1) einzeln mit α_1, β_1, γ_1 bezeichnet:

$$(a_1b)^2 = (\beta - \alpha_1)^2 + \beta\gamma$$
$$(bC_1)^2 = \beta\,(\alpha + \beta)$$
$$(bf)^2 = \beta^2, \text{ folglich, wenn man substituirt:}$$
$$(\beta - \alpha_1)^2 + \beta\gamma : bt^2 = \alpha + \beta : \beta \quad \text{(I).}$$

Ferner ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke apm und a_1Pm_1:

$$am : Pm = a_1m_1 : Pm_1, \text{ mithin auch}$$

$$am + a_1 m_1 : Pm + Pm_1 = am : Pm \text{ d. h.}$$

$$\alpha + \alpha_1 : \sqrt{\beta\gamma} = \alpha : \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha + \alpha_1 = \sqrt{\alpha(\alpha + \beta + \gamma)}$$

oder, wenn man quadrirt:

$$\alpha^2 + 2\alpha\alpha_1 + \alpha_1^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma, \text{ mithin}$$

$$\alpha_1^2 = \alpha(\beta + \gamma - 2\alpha_1) \quad \text{(II)}.$$

Die Substitution von (II) in (I) ergibt:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma - 2\alpha_1) : bt^2 = \alpha + \beta : \beta,$$

daher ist

$$bt^2 = \beta(\beta + \gamma - 2\alpha_1).$$

Da nun

$$(a_1 b)^2 = (\beta - \alpha)^2 + \beta\gamma = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma - 2\alpha_1)$$

so hat man

$$(a_1 b)^2 - (bt)^2 = (a_1 t)^2 = \alpha(\beta + \gamma - 2\alpha_1)$$
$$= \alpha_1^2 \text{ (siehe II.)};$$

d. h. es ist $a_1 t = \alpha_1$, oder mit anderen Worten: Der Kreis (a_1) berührt die Halbirungslinie BS des Winkels B. Eben so berührt (a_1) die Linie CS, mithin ist der Kreis (a_1) dem Dreieck BSC einbeschrieben. Dasselbe gilt für die Kreise (b_1) und (c_1) im Bezug auf die Dreiecke ASC und ASB. Die Steiner'sche Construction ist demnach vollständig erwiesen. —

§. 6.

Zusatz.

Da

$$\alpha + \alpha_1 = \sqrt{\alpha(\alpha + \beta + \gamma)}$$
$$\beta + \beta_1 = \sqrt{\beta(\alpha + \beta + \gamma)}$$
$$\gamma + \gamma_1 = \sqrt{\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}$$

so erhält man

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \alpha_1)^2 + (\beta + \beta_1)^2 + (\gamma + \gamma_1)^2. —$$

Der Jnhalt des Dreiecks abc ist offenbar

$= \sqrt{\alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma)}$ d. h. gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radien in die Summe dieser Radien.

Da sich ferner die Geraden aa_1, bb_1, cc_1 in einem und demselben Punkt P durchschneiden, so folgt noch:

1) Die Durchschnitte der Geraden

ac_1 und a_1c

bc_1 und b_1c

ba_1 und b_1a

liegen in gerader Linie (Siehe meine harmonischen Verhältnisse Abschnitt 2 Lehrs. XXIII)

2) Jn das Sechseck $ac_1ba_1cb_1$ lässt sich immer ein Kegelschnitt beschreiben. —

Dritter Abschnitt.

Neue Auflösung.

§. 7.

Figur 4.

1) Man halbire die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC durch die Geraden AS, BS, CS so schneiden sich diese in einem und demselben Punkt. —

2) Man fälle von S auf die Seiten des Dreiecks die Senkrechten SM, SN, SK.

3) Jn das Dreieck BSC beschreibe man den Kreis (a_1), welcher die BC in A_1 berührt, und in das Dreieck ASN den Kreis (a_2), welcher die AS in d berührt. —

4) Man trage Sd von A_1 nach D und D_1 auf, so dass $A_1D = A_1D_1 = Sd$ wird, und errichte in D und D_1 auf BC die Senkrechten Db und D_1c, dann sind

5) b, c die Mittelpunkte, bD, cD_1 die Radien zweier der gesuchten Kreise. —

Eben so wird der dritte Kreis (a) bestimmt. —

Beweis.

Es sei AS = e, BS = f, CS = g, AN = n, BN = k, CM = m und der Radius SN des einbeschriebenen Kreises = r, dann ist

$$BA_1 = \frac{a + f - g}{2}.$$

$$A_1D = Sd = \frac{e + r - n}{2} \text{ (p. c.), mithin}$$

$$BD = \frac{a + f - g - (e + r - n)}{2}.$$

Ferner hat man

$$BD : BK = Db : KS$$

d. h., wenn wir die Radien $Db = y$, $cD_1 = z$ setzen

$$a + f - g - (e + r - n) : a - b + c = y : r$$

mithin ist

$$y = r \cdot \frac{a + f - g - (e + r - n)}{a - b + c}. \text{ Eben so}$$

$$z = r \cdot \frac{a - f + g - (e + r - n)}{a + b - c}. —$$

Da nun die aus den Punkten b und c mit den Radien bD, cD_1 beschriebenen Kreise je zwei Seiten des Dreiecks berühren, so ist zunächst zu zeigen, dass sie auch einander berühren, d. h.: dass die Distanz ihrer Mittelpunkte gleich der Summe ihrer Radien ist. Es muss also gezeigt werden, dass

$$bc = y + z$$

oder, was dasselbe, dass:

$$(y + z)^2 = (y - z)^2 + (DD_1)^2, \text{ d. h., dass}$$

$$4yz = (DD_1)^2 = (e + r - n)^2 \text{ ist. —}$$

Dies ergibt sich, wie folgt:

Es ist

$$\text{(I.)} \quad 4yz = 4r^2 \left(\frac{\{a + f - g - (e + r - n)\}}{a - b + c} \cdot \frac{\{a - f + g - (e + r - n)\}}{a + b - c} \right)$$

Ferner ist, wenn wir den halben Umfang des Dreiecks mit s bezeichnen:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)} = rs$$

mithin

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 4r^2 \cdot 4s^2 = 4r^2 (a + b + c)^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{4r^2}{(a - b + c)(a + b - c)} = \frac{-a + b + c}{a + b + c} = \frac{n}{s} = \frac{n}{a + n}.$$

Die Substitution dieser Werthe in (I) ergibt:

$$\text{(II.)} \quad 4yz = \frac{n}{a + n} \left[\{a + f - g - (e + r - n)\} \{a - f + g - (e + r - n)\} \right]$$

$$= \frac{n}{a + n} \left\{ a^2 - (f - g)^2 + (e + r - n)^2 - 2a\,(e + r - n) \right\}$$

Zieht man jetzt die Gerade Sa_2 und den Radius a_1t senkrecht auf BS, so erhält man zwei Dreiecke Sda_2 und a_1tS, welche einander ähnlich sind. Diese Aehnlichkeit ergibt sich aus folgender Betrachtung. —

Nennt man die Winkel des Dreiecks α, β, γ so ist

$$\angle ASN = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha, \text{ mithin}$$
$$\angle dSa_2 = 45^\circ - \tfrac{1}{4}\alpha \text{ und}$$
$$\angle da_2S = 45^\circ + \tfrac{1}{4}\alpha.$$

Ferner ist
$$\angle BSC = 180^\circ - (\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma)$$
oder, da
$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90,$$
$$\angle BSC = 180 - (90 - \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= 90 + \tfrac{1}{2}\alpha, \text{ mithin}$$
$$\angle BSa_1 = 45^\circ + \tfrac{1}{4}\alpha$$
$$= \angle da_2S. \text{ —}$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt nun:

$$a_2d : Sd = St : ta_1.$$

Nun ist aber

$$a_2d = \frac{2\triangle ASN}{AS + SN + AN} = \frac{nr}{e + r + n},\quad ta_1 = \frac{ar}{f + g + a}$$

$$Sd = \frac{e + r - n}{2},$$

$$St = \frac{f + g - a}{2},$$

mithin, wenn man substituirt:

$$\frac{nr}{e + r + n} : \frac{e + r - n}{2} = \frac{f + g - a}{2} : \frac{ar}{f + g + a}$$

Hieraus folgt

$$anr^2 = \frac{(e + r + n)(e + r - n)(f + g + a)(f + g - a)}{4}$$

mithin

$$\text{(III.)}\quad 4anr^2 = (e + r + n)(e + r - n)(f + g + a)(f + g - a).$$

Nun ist

$$\triangle BSC = \frac{1}{2} ar = \frac{1}{4} \sqrt{(f+g+a)(f+g-a)(a-f+g)(a+f-g)}$$

mithin

$$\text{(IV.)} \quad 4a^2r^2 = (f+g+a)(f+g-a)(a-f+g)(a+f-g)$$

Dividirt man (III) durch (IV), so erhält man

$$\frac{n}{a} = \frac{(e+r+n)(e+r-n)}{(a-f+g)(a+f-g)}; \text{ mithin ist}$$

$$\text{(V.)} \quad a(e+r+n)(e+r-n) = n\left(a^2-(f-g)^2\right)$$

Substituirt man (V) in (II), so erhält man

$$4yz = (e+r-n)\frac{n}{a+n}\left(\frac{a}{n}(e+r+n)+(e+r-n)-2a\right)$$

$$= \frac{e+r-n}{a+n}\left[ae+ar+an-2an+n(e+r-n)\right]$$

$$= \frac{e+r-n}{a+n}\left[a(e+r-n)+n(e+r-n)\right]$$

$$= (e+r-n)^2. —$$

Nennt man nun wie in Figur 2, C_1 den Berührungspunkt des dem Dreieck ASB einbeschriebenen Kreises mit der Geraden AB, so ist

$$BC_1 = \frac{c+f-e}{2} \text{ und da}$$

$$BE = BD = \frac{a+f-g-(e+r-n)}{2},$$

so erhält man

$$C_1E = \frac{c-a+g+r-n}{2}.$$

Aber $\qquad c - n = k$

und $\qquad a - k = m.$

Demnach ist

$$C_1E = \frac{g+r-m}{2}.$$

Dieser Werth ist dem Werth für A_1D ganz analog, mithin gilt von den Kreisen (a) und (b) dasselbe, was bereits von den Kreisen (b) und (c) bewiesen ist, d. h. auch die Kreise (a) und

(b) berühren einander. Eben so wird gezeigt, dass sich die Kreise (a) und (c) berühren. Demnach ist unsere Construction vollständig bewiesen.

§. 8.

Die oben gefundenen Werthe von y und z stimmen durchaus mit den *Malfattischen* Ausdrücken überein. Da nämlich

$$BK = k = \frac{a - b + c}{2} \text{ und}$$

$$CK = m = \frac{a + b - c}{2},$$

ferner

$$a + n = s \text{ ist, so hat man}$$

$$y = \frac{r}{2k}(s + f - r - e - g)$$

$$z = \frac{r}{2m}(s + g - r - e - f) \text{ und eben so}$$

$$x = \frac{r}{2n}(s + e - r - f - g). -$$

Setzt man ferner

$$A_1D = A_1D_1 = \frac{e + r - n}{2} = p$$

$$B_1d_1 = B_1g_1 = \frac{f + r - k}{2} = q$$

$$C_1E = C_1E_1 = \frac{g + r - m}{2} = v$$

so ist

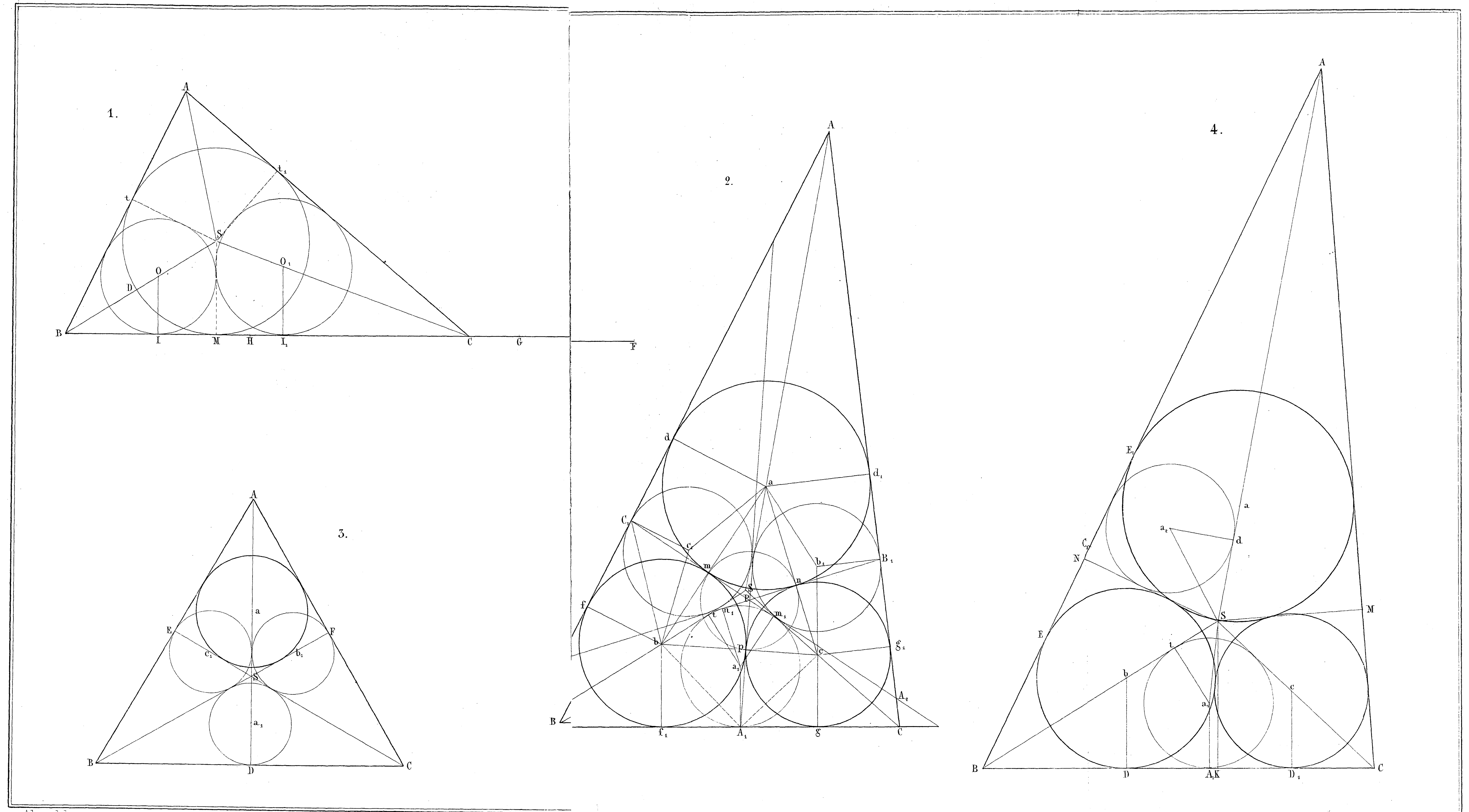
$$p = \sqrt{yz},\ q = \sqrt{xz},\ v = \sqrt{xy}$$

mithin

$$xyz = pqv, \text{ und}$$

$$\frac{pq}{v} = z;\ \frac{pv}{q} = y;\ \frac{qv}{p} = x.$$

Diese letzteren Ausdrücke hat schon *Tédenat* gefunden. (Siehe *Annales de mathématiques tom. II, p.* 165 — 170). —



Adams del.

Lith. Anstalt v. J. Wurster u. Comp. in Winterthur.